Teoretická část - 3.6.2021

1. (a) Definujte fundamentální systém a Wronského determinant (2 body).
   (b) Zformulujte větu o vlastnostech Wronskiánu a větu o vztahu lineání nezávislosti a Wronskiánu (3 body).
   (c) Větu o vztahu lineání nezávislosti a Wronskiánu dokažte (2 body).
   (d) Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^{10}(\mathbb{R})$ jsou lineárně nezávislé. Platí, že i funkce f' a g' jsou lineárně nezávislé? Zdůvodněte (1 bod).

2. (a) Definujte číselnou řadu a její součet a absolutní konvergenci (3 body).

   (b) Zformulujte srovnávací kritérium a větu o vztahu konvergence a absolutní konvergence (2 body).

   (c) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné řady, rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $b_n < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, potom i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje,

      ii. pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně a $b_n < |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, potom i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje,

      iii. pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $|b_n| < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, potom i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte parciální derivace a totální diferenciál (2 body).
   (b) Zformulujte větu o derivaci složeného zobrazení (1 bod).
   (c) Dokažte větu o derivaci složeného zobrazení (4 body).
   (d) Nechť $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(3,5) = (1,1)$, $J_F(3,5) = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -2, -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g(1,1) = (-3,2)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ a $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Jak vypadá $\nabla(g \circ F)(3,5)$ (pokud existuje)? (1 bod).